

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
Кафедра ИНФОРМАЦИОННЫХ СИСТЕМ

Королёв Константин Юрьевич

Выпускная квалификационная работа
бакалавра

Метод аналитической декомпозиции в
расчётах упругого тела с включением
в форме прямоугольника

Направление 010400

Прикладная математика и информатика

Научный руководитель,
доктор физ.-мат. наук,
профессор кафедры информационных систем,
заведующий кафедрой механики,
Матросов А. В.

Санкт-Петербург
2018

Содержание

Введение	3
Цель работы	4
Обзор литературы	5
§1. Метод коллокации плоской задачи ТУ	7
1. Постановка плоской задачи	7
2. Метод коллокации	10
3. Метод аналитической декомпозиции	16
§2. Программная реализация	19
1. Метод коллокации для прямоугольной области	19
2. Графический интерфейс	21
Заключение	22
Список литературы	23

Введение

Расчеты на прочность является актуальной задачей для каждого сооружения. Часто конструируемые объекты обладают сложной геометрической формой, состоят из различных материалов. Рассматривая тела сложной конфигурации как единое целое, возникают некоторые трудности в расчетах на прочность. Одним из способов решения данных проблем является сведение задачи к нескольким более простым. Объект можно условно разбить на несколько тел с каноническими характеристиками, для которых известны общие аналитические решения. Решение для всей конструкции будет состоять из соответствующих решений для каждой из областей, найденных с учетом граничных условий исходной задачи и контакта смежных областей.

Одной из наук, занимающейся расчетом напряженно-деформируемого состояния (НДС) объектов, является теория упругости. Существует множество различных численных методов решения плоских и пространственных задач, со своими преимуществами и недостатками, однако, развитие теории аналитических решений этих задач и появление систем аналитических вычислений, таких как Maple, Mathematica, способствовало развитию приближенно-аналитических методов решения. В данной работе пойдет речь об одном из таких методов решения плоской задачи теории упругости.

Приближенно-аналитические методы, по сравнению с численными, дают решение задачи в виде аналитической функции. Это позволяет решать непрерывные задачи оптимизации связанные с рациональным проектированием конструкций. Также приближенно-аналитические решение можно использовать в качестве эталонных решений при тестировании численных методов.

Цель работы

Целью работы является программная реализация на языке Python 3.6 приближенно-аналитического решения для изотропного и анизотропного прямоугольника и исследование применения метода коллокаций для удовлетворения граничным условиям задачи. Исследование полученных решений для прямоугольных областей и неоднородных конструкций составленных из однородных прямоугольников. Провести сравнение результатов, полученных методом разложения граничных условий в ряды Фурье и методом коллокации.

Новизна работы состоит в программной реализации приближенно-аналитического метода для анизотропного прямоугольника и неоднородных конструкций, составленных из прямоугольников с различными физико-механическими характеристиками, в исследованиях применения метода коллокации для удовлетворения граничным условиям задачи. Также в создании удобного графического интерфейса для выполнения расчетов на прочность прямоугольных однородных областей.

Обзор литературы

Первыми аналитическими решениями для изотропного прямоугольника были решения в полиномах [3], полученные А. Менаже. Эти решения строились через представления компонентов НДС в виде полиномов различной степени с неизвестными коэффициентами. Коэффициенты подбирались из условий удовлетворения граничным условиям. Это не всегда удавалось сделать.

Использование гиперболо-тригонометрических рядов для решения плоских задач теории упругости [3] можно встретить в работах Рибьера и Файлона. Рибьер предложил искать решение в виде ряда произведений некоторых функций зависящих от y на $\cos \frac{\pi n x}{l}$. Файлон предложил вместо косинусов использовать ряд по синусам. Эти решения позволяли удовлетворить граничным условиям заданным только на верхней и нижней грани. По-существу оба эти решения получены из решения симметричного и кососимметричного нагружения бесконечной полосы, из которой вырезался прямоугольник.

Метод начальных функций (МНФ) позволяет представить все компоненты НДС в упругом прямоугольнике через начальные функции заданные на линиях $x = 0$ или $y = 0$. Впервые этот метод был предложен А. С. Малиевым [4] и В. З. Власовым [5] с использованием символического способа построения решения систем уравнений в частных производных А. И. Лурье [6].

Многие авторы использовали МНФ для решения различных задач теории упругости и строительной механики: В. А. Агарев разработал метод начальных функций для расчета двумерных задач теории упругости [7], М. Г. Ванюшенков использовал этот метод в расчете устойчивости сжатых тонких изотропных пластин [8], С. М. Галилеев и А. В. Матросов рассчитывали методом начальных функций толстые слоистые анизотропные плиты [9].

Метод однородных решений, предложенный А. И. Лурье [6] использовался для построения решения, позволяющего удовлетворить всем граничным условиям, заданным на сторонах упругого прямоугольника. Для этого

были найдены решения, позволяющие удовлетворить граничным условиям на двух противоположных гранях с нулевыми граничными условиями на двух других гранях. Сумма двух таких решений позволяет решить задачу с удовлетворением граничных условий на всех четырех сторонах прямоугольника.

И. И. Ворович [10] и В. К. Прокопов [11] представили превосходный обзор применения метода однородных решений в задачах теории упругости. Недостаток этого подхода заключается в том, что решение представляется в виде ряда по неортогональным функциям. Это приводит к тому, что в некоторых случаях ряды не сходятся.

Метод суперпозиции Ламе используется для решения задач деформирования упругих тел конечных размеров. Его идея заключается в том что, имея два решения, каждое из которых позволяет удовлетворить граничным условиям на двух противоположных сторонах прямоугольника, можно построить общее решение для прямоугольной области как сумму указанных двух решений.

Впервые подобный подход был применен русским ученым Б. М. Кояловичем для решения изгиба защемленной пластины. Этот подход развивали В. Т. Гринченко, А. Ф. Улитко, Мелешко [13], [14] для статических и динамических задач изотропного прямоугольника на основе двух решений построенных А. Ф. Улитко.

А. В. Матросов разработал метод суперпозиции для анизотропного упругого прямоугольника на основе двух решений МНФ [15]–[17].

§1. Метод коллокации плоской задачи теории упругости

1. Постановка плоской задачи для прямоугольной однородной области

Дана прямоугольная пластина размером $h \times a$ находящаяся в состоянии плоской деформации. Материал пластины либо отротропен, либо изотропен. Для случая ортотропии главные направления упругости параллельны ребрам пластины.

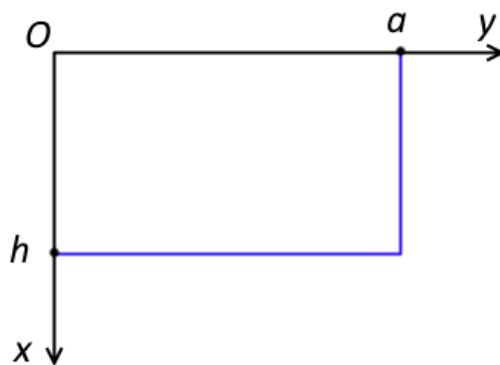


Рис. 1: Декартова прямоугольная система координат для прямоугольного однородного тела

Задана декартова прямоугольная система координат с началом в левой верхней вершине пластины и осями, проходящими вдоль левой и верхней грани.

Известны технические характеристики материала:

- Для ортотропии заданы модули растяжения-сжатия E_x , E_y вдоль соответствующих осей, модуль сдвига G_{xy} в плоскости Oxy и коэффициент Пуассона ν_{xy} (направление действующего напряжения — x , направление деформации — y).
- Для изотропии заданы модуль Юнга E и коэффициент Пуассона ν .

В задачах плоской деформации полагается что касательные напряжения, направленные перпендикулярно пластине, отсутствуют ($\tau_{zx} = \tau_{zx} =$

0), а также любое перемещение точек происходит в плоскости этой пластины ($u = u(x, y), v = v(x, y), w(x, y) = 0$). Все законы теории упругости будем записывать в соответствии с условиями этой задачи.

Рассмотрим уравнение равновесия Коши-Навье для плоской задачи теории упругости:

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + X = 0, \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + Y = 0. \end{cases}$$

Здесь σ_x, σ_y — нормальные напряжения; τ_{xy} — касательное напряжение в плоскости пластины; X, Y — проекции объемных сил на одноименные оси. Предположим, что на пластину действуют только поверхностные (заданные на границах) силы, то есть отсутствуют объемные силы ($X = Y = 0$):

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0, \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0. \end{cases} \quad (1)$$

Далее, запишем обобщенный закон Гука:

$$\begin{cases} \sigma_x = A_{11}\epsilon_x + A_{12}\epsilon_y + A_{16}\gamma_{xy}, \\ \sigma_y = A_{21}\epsilon_x + A_{22}\epsilon_y + A_{26}\gamma_{xy}, \\ \sigma_z = A_{31}\epsilon_x + A_{32}\epsilon_y + A_{36}\gamma_{xy}, \\ \tau_{xy} = A_{61}\epsilon_x + A_{62}\epsilon_y + A_{66}\gamma_{xy}, \end{cases}$$

где $\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z, \gamma_{yz}, \gamma_{xz}, \gamma_{xy}$ — соответствующие относительные и угловые деформации; A_{ij} — модули упругости. Эта система является переопределенной, поэтому можно исключить уравнение для σ_z . Поскольку мы не рассматриваем общий случай анизотропии, то мы можем несколько упростить эту систему:

- для случая ортотропии оси координат направлены перпендикулярно плоскостям упругой симметрии, значит нормальные напряжения будут зависеть только от относительных деформаций, а касательное напряжения только от соответствующего угла сдвига ($A_{61} = A_{62} = A_{16} = A_{26} = 0$). Также выполняется $A_{12} = A_{21}$.

- для случая изотропии к ортотропным упрощениям добавляется равенство $A_{11} = A_{22}$.

Учитывая вышесказанное запишем обобщенный закон Гука в следующей форме:

$$\begin{cases} \sigma_x = H_{11}\epsilon_x + H_{12}\epsilon_y, \\ \sigma_y = H_{12}\epsilon_x + H_{22}\epsilon_y, \\ \tau_{xy} = H_{66}\gamma_{xy}, \end{cases} \quad (2)$$

где H_{ij} — коэффициенты пропорциональности между указанными величинами. В нашем случае они совпадают с модулями упругости из закона Гука, то есть $H_{ij} = A_{ij}$.

Используя следующие соотношения Коши между линейными перемещениями $u(x, y)$, $v(x, y)$ и деформациями:

$$\begin{cases} \epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \\ \epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \\ \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \end{cases}$$

из (2) выразим дифференциальную зависимость перемещений от напряжений:

$$\begin{cases} \sigma_x = H_{11}\frac{\partial u}{\partial x} + H_{12}\frac{\partial v}{\partial y}, \\ \sigma_y = H_{12}\frac{\partial u}{\partial x} + H_{22}\frac{\partial v}{\partial y}, \\ \tau_{xy} = H_{66}\frac{\partial u}{\partial y} + H_{66}\frac{\partial v}{\partial x}. \end{cases} \quad (3)$$

Задача сводится к нахождению таких функции перемещений $u(x, y)$, $v(x, y)$ и напряжений $\sigma_x(x, y)$, $\sigma_y(x, y)$, $\tau_{xy}(x, y)$, которые удовлетворят уравнениям (1), (3). Для вывода этой СДУ использовались общие уравнения теории упругости, которые можно найти в [1], [2].

Также на ребрах пластины заданы граничные условия. Они определяются значением некоторой пары неизвестных функций. Граничные условия могут быть следующих типов:

1. Кинематические (на ребре заданы функции перемещения).
2. Силовые (заданы нормальное напряжение, направление которого перпендикулярно ребру, и касательное перемещение)
3. Смешанные (заданы либо нормальное напряжение, перпендикулярное ребру, и перемещение вдоль ребра, либо касательное напряжение и перемещение, перпендикулярное ребру). Будем полагать что для функций граничных условий существует разложение в тригонометрический ряд Фурье с периодом $2h$ для вертикальных граней, и периодом $2a$ для горизонтальных.

То есть при заданных геометрических размерах пластины и технических характеристиках её материала, необходимо найти решение дифференциальных уравнений (1), (3), которое бы удовлетворяло граничным условиям на ребрах пластины.

2. Приближенно-аналитическое решение методом коллокации

Рассмотрим аналитическое решение задачи (1), (3) в виде гиперболических тригонометрических рядов [17]:

$$\begin{aligned}
 u(x, y) &= \sum_{p=1}^4 \sum_{m=1}^{\infty} \tilde{\tilde{L}}_{1p}^{s,m}(y) h_p^m \cos(\alpha_m x) + \sum_{p=1}^4 \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{\tilde{L}}_{1p}^{s,n}(x) g_p^n \sin(\beta_n y), \\
 v(x, y) &= \sum_{p=1}^4 \sum_{m=1}^{\infty} \tilde{\tilde{L}}_{2p}^{s,m}(y) h_p^m \sin(\alpha_m x) + \sum_{p=1}^4 \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{\tilde{L}}_{2p}^{s,n}(x) g_p^n \cos(\beta_n y), \\
 \sigma_x(x, y) &= \sum_{p=1}^4 \sum_{m=1}^{\infty} \tilde{\tilde{L}}_{3p}^{s,m}(y) h_p^m \sin(\alpha_m x) + \sum_{p=1}^4 \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{\tilde{L}}_{3p}^{s,n}(x) g_p^n \sin(\beta_n y), \\
 \sigma_y(x, y) &= \sum_{p=1}^4 \sum_{m=1}^{\infty} \tilde{\tilde{L}}_{3p}^{s,m}(y) h_p^m \sin(\alpha_m x) + \sum_{p=1}^4 \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{\tilde{L}}_{5p}^{s,n}(x) g_p^n \sin(\beta_n y), \\
 \tau_{xy}(x, y) &= \sum_{p=1}^4 \sum_{m=1}^{\infty} \tilde{\tilde{L}}_{4p}^{s,m}(y) h_p^m \cos(\alpha_m x) + \sum_{p=1}^4 \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{\tilde{L}}_{4p}^{s,n}(x) g_p^n \cos(\beta_n y).
 \end{aligned} \tag{4}$$

Данное решение называют решением “по синусам”. Здесь $\tilde{\tilde{L}}_{ip}^{s,m}$, $\tilde{\tilde{L}}_{ip}^{s,n}$ – определенные линейные комбинации гиперболических синусов либо косинусов; $\alpha_m = \frac{m\pi}{h}$; $\beta_n = \frac{n\pi}{a}$; h_p^m , g_p^n – некоторые константы. Для ортотропии $\tilde{\tilde{L}}_{ip}^{s,m}$ и $\tilde{\tilde{L}}_{ip}^{s,n}$ находятся по следующим формулам [15]:

$$\begin{aligned}\tilde{\tilde{L}}_{11}^{s,0} &= \tilde{\tilde{L}}_{44}^{s,0} = H_{22}H_{66}(\bar{\alpha}_1^2 - \bar{\alpha}_2^2)/\bar{d} \\ \tilde{\tilde{L}}_{14}^{s,0} &= H_{22}y(\bar{\alpha}_1^2 - \bar{\alpha}_2^2)/\bar{d} \\ \tilde{\tilde{L}}_{12}^{s,0} &= \tilde{\tilde{L}}_{13}^{s,0} = \tilde{\tilde{L}}_{2p}^{s,0} = \tilde{\tilde{L}}_{3p}^{s,0} = \tilde{\tilde{L}}_{41}^{s,0} = \tilde{\tilde{L}}_{42}^{s,0} = \tilde{\tilde{L}}_{43}^{s,0} = \tilde{\tilde{L}}_{5p}^{s,0} = 0, \\ p &= \overline{1,4}\end{aligned}$$

$$\tilde{\tilde{L}}_{11}^{s,m} = \tilde{\tilde{L}}_{44}^{s,m} = H_{66}((H_{12} + \bar{\alpha}_1^2 H_{22}) \cosh(\bar{\alpha}_1 \alpha_m y) - (H_{12} + \bar{\alpha}_2^2 H_{22}) \cosh(\bar{\alpha}_2 \alpha_m y))/\bar{d}$$

$$\begin{aligned}\tilde{\tilde{L}}_{12}^{s,m} &= -\tilde{\tilde{L}}_{34}^{s,m} = -H_{66}((H_{12} + \bar{\alpha}_1^2 H_{22}) \sinh(\bar{\alpha}_1 \alpha_m y)/\bar{\alpha}_1 - \\ &\quad - (H_{12} + \bar{\alpha}_2^2 H_{22}) \sinh(\bar{\alpha}_2 \alpha_m y)/\bar{\alpha}_2)/\bar{d}\end{aligned}$$

$$\tilde{\tilde{L}}_{13}^{s,m} = -\tilde{\tilde{L}}_{24}^{s,m} = -(H_{12} + H_{66})(\cosh(\bar{\alpha}_1 \alpha_m y) - \cosh(\bar{\alpha}_2 \alpha_m y))/\bar{d}$$

$$\tilde{\tilde{L}}_{14}^{s,m} = -((H_{66} - \bar{\alpha}_1^2 H_{22}) \sinh(\bar{\alpha}_1 \alpha_m y)/\bar{\alpha}_1 - (H_{66} - \bar{\alpha}_2^2 H_{22}) \sinh(\bar{\alpha}_2 \alpha_m y)/\bar{\alpha}_2)/(\alpha_m \bar{d})$$

$$\begin{aligned}\tilde{\tilde{L}}_{21}^{s,m} &= -\tilde{\tilde{L}}_{43}^{s,m} = H_{66}((H_{11} + \bar{\alpha}_1^2 H_{12}) \sinh(\bar{\alpha}_1 \alpha_m y)/\bar{\alpha}_1 - \\ &\quad - (H_{11} + \bar{\alpha}_2^2 H_{12}) \sinh(\bar{\alpha}_2 \alpha_m y)/\bar{\alpha}_2)/\bar{d}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{\tilde{L}}_{22}^{s,m} &= \tilde{\tilde{L}}_{33}^{s,m} = ((H_{12}H_{66} + H_{12}^2 - H_{11}H_{22} + \bar{\alpha}_1^2 H_{22}H_{66}) \cosh(\bar{\alpha}_1 \alpha_m y) - \\ &\quad - (H_{12}H_{66} + H_{12}^2 - H_{11}H_{22} + \bar{\alpha}_2^2 H_{22}H_{66}) \cosh(\bar{\alpha}_2 \alpha_m y))/\bar{d}\end{aligned}$$

$$\tilde{\tilde{L}}_{23}^{s,m} = -((H_{11} - \bar{\alpha}_1^2 H_{66}) \sinh(\bar{\alpha}_1 \alpha_m y)/\bar{\alpha}_1 - (H_{11} - \bar{\alpha}_2^2 H_{66}) \sinh(\bar{\alpha}_2 \alpha_m y)/\bar{\alpha}_2)/(\alpha_m \bar{d})$$

$$\tilde{\tilde{L}}_{31}^{s,m} = -\tilde{\tilde{L}}_{42}^{s,m} = \alpha_m H_{66}(H_{11}H_{22} - H_{12}^2)(\cosh(\bar{\alpha}_1 \alpha_m y) - \cosh(\bar{\alpha}_2 \alpha_m y))/\bar{d}$$

$$\begin{aligned}\tilde{\tilde{L}}_{32}^{s,m} &= \alpha_m \left((H_{12}^2 H_{66} + \bar{\alpha}_1^2 (2H_{12}H_{22}H_{66} - H_{11}H_{22}^2 + H_{12}^2 H_{22}) + \right. \\ &\quad \left. + \bar{\alpha}_1^4 H_{22}^2 H_{66}) \sinh(\bar{\alpha}_1 \alpha_m y)/\bar{\alpha}_1 - (H_{12}^2 H_{66} + \right. \\ &\quad \left. + \bar{\alpha}_2^2 (2H_{12}H_{22}H_{66} - H_{11}H_{22}^2 + H_{12}^2 H_{22}) + \bar{\alpha}_2^4 H_{22}^2 H_{66}) \sinh(\bar{\alpha}_2 \alpha_m y)/\bar{\alpha}_2 \right)/\bar{d}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{\tilde{L}}_{41}^{s,m} &= \alpha_m H_{66} \left((H_{11} + 2\bar{\alpha}_1^2 H_{12} + \bar{\alpha}_1^4 H_{22}) \sinh(\bar{\alpha}_1 \alpha_m y) / \bar{\alpha}_1 - \right. \\
&\quad \left. - (H_{11} + 2\bar{\alpha}_1^2 H_{12} + \bar{\alpha}_1^4 H_{22}) \sinh(\bar{\alpha}_1 \alpha_m y) / \bar{\alpha}_1 \right) / \bar{d} \\
\tilde{\tilde{L}}_{51}^{s,m} &= \alpha_m H_{66} (H_{12}^2 - H_{11} H_{22}) (\bar{\alpha}_1^2 \cosh(\bar{\alpha}_1 \alpha_m y) - \bar{\alpha}_2^2 \cosh(\bar{\alpha}_2 \alpha_m y)) / \bar{d} \\
\tilde{\tilde{L}}_{52}^{s,m} &= \alpha_m \left((H_{11} H_{12} H_{66} - \bar{\alpha}_1^2 (H_{11} H_{12} H_{22} - H_{12}^2 H_{66} - H_{12}^3 - H_{11} H_{22} H_{33}) + \right. \\
&\quad \left. + \bar{\alpha}_1^4 H_{12} H_{22} H_{66}) \sinh(\bar{\alpha}_1 \alpha_m y) / \bar{\alpha}_1 - (H_{11} H_{12} H_{66} - \right. \\
&\quad \left. - \bar{\alpha}_2^2 (H_{11} H_{12} H_{22} - H_{12}^2 H_{66} - H_{12}^3 - H_{11} H_{22} H_{33}) + \right. \\
&\quad \left. + \bar{\alpha}_2^4 H_{12} H_{22} H_{66}) \sinh(\bar{\alpha}_2 \alpha_m y) / \bar{\alpha}_2 \right) / \bar{d} \\
\tilde{\tilde{L}}_{53}^{s,m} &= H_{66} ((H_{11} + \bar{\alpha}_1^2 H_{12}) \cosh(\bar{\alpha}_1 \alpha_m y) - (H_{11} + \bar{\alpha}_2^2 H_{12}) \cosh(\bar{\alpha}_2 \alpha_m y)) / \bar{d} \\
\tilde{\tilde{L}}_{54}^{s,m} &= \left((H_{11} H_{66} - \bar{\alpha}_1^2 (H_{11} H_{22} - H_{12} H_{66} - H_{12}^2)) \sinh(\bar{\alpha}_1 \alpha_m y) / \bar{\alpha}_1 - \right. \\
&\quad \left. - (H_{11} H_{66} - \bar{\alpha}_2^2 (H_{11} H_{22} - H_{12} H_{66} - H_{12}^2)) \sinh(\bar{\alpha}_2 \alpha_m y) / \bar{\alpha}_2 \right) / \bar{d}, \\
&\quad \forall m \in \mathbf{N}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{\tilde{L}}_{22}^{s,0} &= \tilde{\tilde{L}}_{44}^{s,0} = H_{11} H_{66} (\bar{\alpha}_1^2 - \bar{\alpha}_2^2) / \bar{d} \\
\tilde{\tilde{L}}_{24}^{s,0} &= H_{11} (\bar{\alpha}_1^2 - \bar{\alpha}_2^2) x / \bar{d} \\
\tilde{\tilde{L}}_{1p}^{s,0} &= \tilde{\tilde{L}}_{21}^{s,0} = \tilde{\tilde{L}}_{23}^{s,0} = \tilde{\tilde{L}}_{3p}^{s,0} = \tilde{\tilde{L}}_{41}^{s,0} = \tilde{\tilde{L}}_{42}^{s,0} = \tilde{\tilde{L}}_{43}^{s,0} = \tilde{\tilde{L}}_{5p}^{s,0} = 0, p = \overline{1, 4}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{\tilde{L}}_{11}^{s,n} &= \tilde{\tilde{L}}_{33}^{s,n} = -((H_{11} H_{22} - H_{12}^2 - H_{12} H_{66} - \bar{\alpha}_1^2 H_{11} H_{66}) \cosh(\bar{\alpha}_1 \beta_n x) - \\
&\quad - (H_{11} H_{22} - H_{12}^2 - H_{12} H_{66} - \bar{\alpha}_2^2 H_{11} H_{66}) \cosh(\bar{\alpha}_2 \beta_n x)) / \bar{d} \\
\tilde{\tilde{L}}_{12}^{s,n} &= -\tilde{\tilde{L}}_{43}^{s,n} = H_{66} ((H_{22} + \bar{\alpha}_1^2 H_{12}) \sinh(\bar{\alpha}_1 \beta_n x) / \bar{\alpha}_1 - \\
&\quad - (H_{22} + \bar{\alpha}_2^2 H_{12}) \sinh(\bar{\alpha}_2 \beta_n x) / \bar{\alpha}_2) / \bar{d} \\
\tilde{\tilde{L}}_{13}^{s,n} &= -((H_{22} - \bar{\alpha}_1^2 H_{66}) \sinh(\bar{\alpha}_1 \beta_n x) / \bar{\alpha}_1 - (H_{22} - \bar{\alpha}_2^2 H_{66}) \sinh(\bar{\alpha}_2 \beta_n x) / \bar{\alpha}_2) / (\beta_n \bar{d}) \\
\tilde{\tilde{L}}_{14}^{s,n} &= -\tilde{\tilde{L}}_{23}^{s,n} = (H_{12} + H_{66}) (\cosh(\bar{\alpha}_1 \beta_n x) - \cosh(\bar{\alpha}_2 \beta_n x)) / (\beta_n \bar{d}) \\
\tilde{\tilde{L}}_{21}^{s,n} &= -\tilde{\tilde{L}}_{34}^{s,n} = -H_{66} ((H_{12} + \bar{\alpha}_1^2 H_{11}) \sinh(\bar{\alpha}_1 \beta_n x) / \bar{\alpha}_1 - \\
&\quad - (H_{12} + \bar{\alpha}_2^2 H_{11}) \sinh(\bar{\alpha}_2 \beta_n x) / \bar{\alpha}_2) / \bar{d}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{\bar{L}}_{22}^{s,n} &= \bar{\bar{L}}_{44}^{s,n} = H_{66}((H_{12} + \bar{\alpha}_1^2 H_{11}) \cosh(\bar{\alpha}_1 \beta_n x) - (H_{12} + \bar{\alpha}_2^2 H_{11}) \cosh(\bar{\alpha}_2 \beta_n x)) / \bar{\bar{d}} \\ \bar{\bar{L}}_{24}^{s,n} &= -((H_{66} - \bar{\alpha}_1^2 H_{11}) \sinh(\bar{\alpha}_1 \beta_n x) / \bar{\alpha}_1 - (H_{66} - \bar{\alpha}_2^2 H_{11}) \sinh(\bar{\alpha}_2 \beta_n x) / \bar{\alpha}_2) / (\beta_n \bar{\bar{d}})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{\bar{L}}_{31}^{s,n} &= \beta_n \left((H_{12}^2 H_{66} + \bar{\alpha}_1^2 (2H_{11} H_{12} H_{66} + H_{11} H_{12}^2 - H_{11}^2 H_{22}) + \right. \\ &\quad \left. + \bar{\alpha}_1^4 H_{11}^2 H_{66}) \sinh(\bar{\alpha}_1 \beta_n x) / \bar{\alpha}_1 - (H_{12}^2 H_{66} + \bar{\alpha}_2^2 (2H_{11} H_{12} H_{66} + \right. \\ &\quad \left. + H_{11} H_{12}^2 - H_{11}^2 H_{22}) + \bar{\alpha}_2^4 H_{11}^2 H_{66}) \sinh(\bar{\alpha}_2 \beta_n x) / \bar{\alpha}_2 \right) / \bar{\bar{d}}\end{aligned}$$

$$\bar{\bar{L}}_{32}^{s,n} = -\bar{\bar{L}}_{41}^{s,n} = H_{66}(H_{11} H_{22} - H_{12}^2) (\cosh(\bar{\alpha}_1 \beta_n x) - \cosh(\bar{\alpha}_2 \beta_n x)) \beta_n / \bar{\bar{d}}$$

$$\begin{aligned}\bar{\bar{L}}_{42}^{s,n} &= \beta_n H_{66}^2 ((H_{22} + 2H_{12} \bar{\alpha}_1^2 + \bar{\alpha}_1^4 H_{11}) \sinh(\bar{\alpha}_1 \beta_n x) / \bar{\alpha}_1 - \\ &\quad - (H_{22} + 2H_{12} \bar{\alpha}_2^2 + \bar{\alpha}_2^4 H_{11}) \sinh(\bar{\alpha}_2 \beta_n x) / \bar{\alpha}_2) / \bar{\bar{d}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{\bar{L}}_{51}^{s,n} &= \beta_n \left((H_{12} H_{22} H_{66} + \bar{\alpha}_1^2 (H_{11} H_{22} H_{66} + H_{12}^2 H_{66} + H_{12}^3 - H_{11} H_{12} H_{22}) + \right. \\ &\quad \left. + \bar{\alpha}_1^4 H_{11} H_{12} H_{66}) \sinh(\bar{\alpha}_1 \beta_n x) / \bar{\alpha}_1 - (H_{12} H_{22} H_{66} + \bar{\alpha}_2^2 (H_{11} H_{22} H_{66} + \right. \\ &\quad \left. + H_{12}^2 H_{66} + H_{12}^3 - H_{11} H_{12} H_{22}) + \bar{\alpha}_2^4 H_{11} H_{12} H_{66}) \sinh(\bar{\alpha}_2 \beta_n x) / \bar{\alpha}_2 \right) / \bar{\bar{d}}\end{aligned}$$

$$\bar{\bar{L}}_{52}^{s,n} = \beta_n H_{66} (H_{12}^2 - H_{11} H_{22}) (\bar{\alpha}_1^2 \cosh(\bar{\alpha}_1 \beta_n x) - \bar{\alpha}_2^2 \cosh(\bar{\alpha}_2 \beta_n x)) / \bar{\bar{d}}$$

$$\bar{\bar{L}}_{53}^{s,n} = H_{66} ((H_{22} + \bar{\alpha}_1^2 H_{12}) \cosh(\bar{\alpha}_1 \beta_n x) - (H_{22} + \bar{\alpha}_2^2 H_{12}) \cosh(\bar{\alpha}_2 \beta_n x)) / \bar{\bar{d}}$$

$$\begin{aligned}\bar{\bar{L}}_{54}^{s,n} &= \left((H_{22} H_{66} - \bar{\alpha}_1^2 (H_{11} H_{22} - H_{12} H_{66} - H_{12}^2)) \sinh(\bar{\alpha}_1 \beta_n x) / \bar{\alpha}_1 - \right. \\ &\quad \left. - (H_{22} H_{66} - \bar{\alpha}_2^2 (H_{11} H_{22} - H_{12} H_{66} - H_{12}^2)) \sinh(\bar{\alpha}_2 \beta_n x) / \bar{\alpha}_2 \right) / \bar{\bar{d}},\end{aligned}$$

$\forall n \in \mathbf{N}$, где:

$$\bar{d} = \bar{\bar{d}} = \sqrt{(H_{11} H_{22} - 2H_{12} H_{66} - H_{12}^2)^2 - 4H_{11} H_{22} H_{66}^2}$$

$$\bar{\alpha}_1 = \sqrt{\frac{2H_{11} H_{66}}{H_{11} H_{22} - 2H_{12} H_{66} - H_{12}^2 - \bar{d}}}$$

$$\bar{\alpha}_2 = \sqrt{\frac{2H_{11} H_{66}}{H_{11} H_{22} - 2H_{12} H_{66} - H_{12}^2 + \bar{d}}}$$

$$\bar{\bar{\alpha}}_1 = \sqrt{\frac{2H_{22}H_{66}}{H_{11}H_{22} - 2H_{12}H_{66} - H_{12}^2 - \bar{\bar{d}}}}$$

$$\bar{\bar{\alpha}}_1 = \sqrt{\frac{2H_{22}H_{66}}{H_{11}H_{22} - 2H_{12}H_{66} - H_{12}^2 + \bar{\bar{d}}}}$$

Коэффициенты пропорциональности в задаче плоской деформации для ортотропных материалов выражаются по формулам:

$$H_{11} = \frac{E_x}{1 - \nu_{xy}\nu_{yx}} H_{22} = \frac{E_y}{1 - \nu_{xy}\nu_{yx}} H_{12} = \frac{E_y\nu_{xy}}{1 - \nu_{xy}\nu_{yx}} H_{66} = G_{xy}$$

Коэффициент Пуассона ν_{yx} можно найти по формуле:

$$\nu_{yx} = \frac{E_y}{E_x} \nu_{xy}$$

Для изотропии $\tilde{\tilde{L}}_{ip}^{s,m}$ и $\tilde{\tilde{L}}_{ip}^{s,n}$ можно выразить через модуль Юнга и коэффициент Пуассона:

$$\tilde{\tilde{L}}_{11}^{s,0} = \tilde{\tilde{L}}_{44}^{s,0} = 1$$

$$\tilde{\tilde{L}}_{14}^{s,0} = -\frac{2\nu}{E(\nu - 1)}$$

$$\tilde{\tilde{L}}_{12}^{s,0} = \tilde{\tilde{L}}_{13}^{s,0} = \tilde{\tilde{L}}_{2p}^{s,0} = \tilde{\tilde{L}}_{3p}^{s,0} = \tilde{\tilde{L}}_{41}^{s,0} = \tilde{\tilde{L}}_{42}^{s,0} = \tilde{\tilde{L}}_{43}^{s,0} = \tilde{\tilde{L}}_{5p}^{s,0} = 0, p = \overline{1,4}$$

$$\tilde{\tilde{L}}_{11}^{s,m} = \tilde{\tilde{L}}_{44}^{s,m} = \frac{-y\alpha_m \sinh(\alpha_m y) + 2(\nu - 1) \cosh(\alpha_m y)}{2(\nu - 1)}$$

$$\tilde{\tilde{L}}_{12}^{s,m} = -\tilde{\tilde{L}}_{34}^{s,m} = -\frac{(2\nu - 1) \sinh(\alpha_m y) - \alpha_m y \cosh(\alpha_m y)}{2(\nu - 1)}$$

$$\tilde{\tilde{L}}_{13}^{s,m} = -\tilde{\tilde{L}}_{24}^{s,m} = -\frac{y \sinh(\alpha_m y)}{2(\nu - 1)^2 E}$$

$$\tilde{\tilde{L}}_{14}^{s,m} = -\frac{(4\nu - 3) \sinh(\alpha_m y) - \alpha_m y \cosh(\alpha_m y)}{2(\nu - 1)^2 E \alpha_m}$$

$$\tilde{\tilde{L}}_{21}^{s,m} = -\tilde{\tilde{L}}_{43}^{s,m} = -\frac{(2\nu - 1) \sinh(\alpha_m y) + \alpha_m y \cosh(\alpha_m y)}{2(\nu - 1)}$$

$$\tilde{\tilde{L}}_{22}^{s,m} = \tilde{\tilde{L}}_{33}^{s,m} = \frac{\alpha_m y \sinh(\alpha_m y) + 2(\nu - 1) \cosh(\alpha_m y)}{2(\nu - 1)}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{\tilde{L}}_{23}^{s,m} &= -\frac{(4\nu-3)\sinh(\alpha_m y) + \alpha_m y \cosh(\alpha_m y)}{2(\nu-1)^2 E \alpha_m} \\
\tilde{\tilde{L}}_{31}^{s,m} &= -\tilde{\tilde{L}}_{42}^{s,m} = \frac{\alpha_m^2 y E \sinh(\alpha_m y)}{2} \\
\tilde{\tilde{L}}_{32}^{s,m} &= \frac{E \alpha_m (\sinh(\alpha_m y) - \alpha_m y \cosh(\alpha_m y))}{2} \\
\tilde{\tilde{L}}_{41}^{s,m} &= \tilde{\tilde{L}}_{52}^{s,m} = \frac{E \alpha_m (\sinh(\alpha_m y) + \alpha_m y \cosh(\alpha_m y))}{2} \\
\tilde{\tilde{L}}_{51}^{s,m} &= -\frac{E \alpha_m (\alpha_m y \sinh(\alpha_m y) + 2 \cosh(\alpha_m y))}{2} \\
\tilde{\tilde{L}}_{53}^{s,m} &= -\frac{\alpha_m y \sinh(\alpha_m y) + 2\nu \cosh(\alpha_m y)}{2(\nu-1)} \\
\tilde{\tilde{L}}_{54}^{s,m} &= -\frac{(2\nu-3)\sinh(\alpha_m y) - \alpha_m y \cosh(\alpha_m y)}{2(\nu-1)},
\end{aligned}$$

$\forall m \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
\tilde{\tilde{L}}_{22}^{s,0} &= \tilde{\tilde{L}}_{44}^{s,0} = 1 \\
\tilde{\tilde{L}}_{24}^{s,0} &= -\frac{2x}{E(\nu-1)} \\
\tilde{\tilde{L}}_{1p}^{s,0} &= \tilde{\tilde{L}}_{21}^{s,0} = \tilde{\tilde{L}}_{23}^{s,0} = \tilde{\tilde{L}}_{3p}^{s,0} = \tilde{\tilde{L}}_{41}^{s,0} = \tilde{\tilde{L}}_{42}^{s,0} = \tilde{\tilde{L}}_{43}^{s,0} = \tilde{\tilde{L}}_{5p}^{s,0} = 0, p = \overline{1,4}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{\tilde{L}}_{11}^{s,n} &= \tilde{\tilde{L}}_{33}^{s,n} = \frac{\beta_n x \sinh(\beta_n x) + 2(\nu-1) \cosh(\beta_n x)}{2(\nu-1)} \\
\tilde{\tilde{L}}_{12}^{s,n} &= -\tilde{\tilde{L}}_{43}^{s,n} = -\frac{(2\nu-1) \sinh(\beta_n x) + \beta_n x \cosh(\beta_n x)}{2(\nu-1)} \\
\tilde{\tilde{L}}_{13}^{s,n} &= -\frac{(4\nu-3) \sinh(\beta_n x) + \beta_n x \cosh(\beta_n x)}{2(\nu-1)^2 E \beta_n} \\
\tilde{\tilde{L}}_{14}^{s,n} &= -\tilde{\tilde{L}}_{23}^{s,n} = \frac{x \sinh(\beta_n x)}{2(\nu-1)^2 E} \\
\tilde{\tilde{L}}_{21}^{s,n} &= -\tilde{\tilde{L}}_{34}^{s,n} = -\frac{(2\nu-1) \sinh(\beta_n x) - \beta_n x \cosh(\beta_n x)}{2(\nu-1)} \\
\tilde{\tilde{L}}_{22}^{s,n} &= \tilde{\tilde{L}}_{44}^{s,n} = \frac{-\beta_n x \sinh(\beta_n x) + 2(\nu-1) \cosh(\beta_n x)}{2(\nu-1)} \\
\tilde{\tilde{L}}_{24}^{s,n} &= -\frac{(4\nu-3) \sinh(\beta_n x) - \beta_n x \cosh(\beta_n x)}{2(\nu-1)^2 E \beta_n}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{\tilde{L}}_{31}^{s,n} &= \frac{E\beta_n(\sinh(\beta_n x) - \beta_n x \cosh(\beta_n x))}{2} \\
\tilde{\tilde{L}}_{32}^{s,n} &= -\tilde{\tilde{L}}_{41}^{s,n} = \frac{E\beta_n^2 x \sinh(\beta_n x)}{2} \\
\tilde{\tilde{L}}_{42}^{s,n} &= \tilde{\tilde{L}}_{51}^{s,n} = \frac{E\beta_n(\sinh(\beta_n x) + \beta_n x \cosh(\beta_n x))}{2} \\
\tilde{\tilde{L}}_{52}^{s,n} &= -\frac{E\beta_n(\beta_n x \sinh(\beta_n x) - 2 \cosh(\beta_n x))}{2} \\
\tilde{\tilde{L}}_{53}^{s,n} &= -\frac{\beta_n x \sinh(\beta_n x) + 2\nu \cosh(\beta_n x)}{2(\nu - 1)} \\
\tilde{\tilde{L}}_{54}^{s,n} &= -\frac{(2\nu - 3) \sinh(\beta_n x) - \beta_n x \cosh(\beta_n x)}{2(\nu - 1)},
\end{aligned}$$

$\forall n \in \mathbf{N}$. В качестве аналитического приближения к решению будем использовать частичные суммы рядов (4). Будем рассматривать первые $M + 1$ членов каждого ряда.

Из этих формул видно, что функции $\tilde{\tilde{L}}_{i2}^{s,0}$, $\tilde{\tilde{L}}_{i3}^{s,0}$, $\tilde{\tilde{L}}_{i1}^{s,0}$, $\tilde{\tilde{L}}_{i3}^{s,0}$ для любых i тождественно равны нулю. То есть решение (4) не зависит от h_2^0 , h_3^0 , g_1^0 , g_3^0 , а для других коэффициентов h_p^m и g_p^n функции $\tilde{\tilde{L}}_{ip}^{s,m}$ и $\tilde{\tilde{L}}_{ip}^{s,n}$ на всем промежутке не обращаются в тождественный ноль. Получается, искомое приближение к решению располагает $8M + 4$ неопределенными коэффициентами h_p^m и g_p^n , которые мы будем искать из условия удовлетворения граничным условиям.

Так как для каждой границы пластины известны значения некоторой пары искомых функций, выберем $8M + 4$ точки на границах пластины и в каждой точке приравняем значения приближенного решения к значению граничных функций. Поскольку коэффициенты h_p^m и g_p^n в (4) входят линейно, мы получим некоторую СЛАУ, из которой можно найти эти неопределенные коэффициенты.

3. Метод аналитической декомпозиции расчета конструкций сложной конфигурации

Рассмотрим задачу плоской деформации для объектов сложной конфигурации. Необходимо найти решение дифференциальных уравнений (1)(3) при заданных физико-механических характеристиках пластины, которое

бы удовлетворяло граничным условиям, заданным для каждой грани пластины.

Расчет некоторых упругих тел сложной конфигурации можно выполнить произведя его декомпозицию на однородные прямоугольники вертикальными и горизонтальными прямыми. Для каждого прямоугольника построим собственную декартову прямоугольную систему координат с центром в левой верхней вершине и осями, направленными вдоль граней пластины к остальным вершинам. В данных системах координат для каждого прямоугольника построим свое приближение к решению (4) со своими неизвестными коэффициентами. Построим общую для всех прямоугольников СЛАУ, применяя метод коллокации к каждому прямоугольнику. Решив эту СЛАУ найдем неизвестные коэффициенты в приближенных решениях для каждой области.

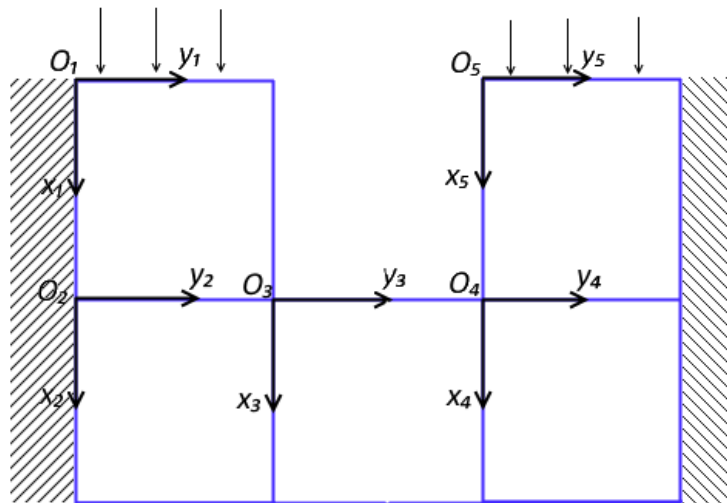


Рис. 2: Пример метода декомпозиции для тела сложной конфигурации с закрепленными концами

Каждая грань любой прямоугольной области либо является частью грани исходного тела, либо является общей гранью для двух прямоугольников. В первом случае, для построения уравнений будем использовать граничные условия исходного тела, по аналогии с методом коллокации для плоской задачи прямоугольной однородной пластины. Выберем некоторое количество точек на грани и в каждой точке приравняем значения приближенного решения для этого прямоугольника к значению граничных функ-

ций.

Во втором случае, построим уравнения из условия сопряжения соприкасающихся прямоугольников. Выберем некоторое количество точек на грани и в каждой точке приравняем значения функций приближенных решений для соседних прямоугольников.

Решение исходной задачи находится путем объединения полученных решений для каждой части тела сложной конфигурации. Построенное таким способом решение будет точно удовлетворять дифференциальному уравнению (1)(3) а так же граничным условиям в некоторых точках.

§2. Программная реализация

Программа была реализована на языке программирования Python, в виду широких возможностей и удобства использования как математических инструментов, так и графических библиотек.

1. Метод коллокации для прямоугольной области

Приведем расчеты для ортотропного прямоугольника размером $h = 5$, $a = 10$ из углеволокнита с высокомодульными волокнами:

$$E_x = 6.9, \quad E_y = 220, \quad G_{xy} = 5, \quad \nu_{xy} = 0.008.$$

Со следующими граничными условиями:

$$\sigma_x(0, y) = 1, \quad \sigma_x(h, y) = 0,$$

$$\tau_{xy}(0, y) = 0, \quad \tau_{xy}(h, y) = 0,$$

$$u(x, 0) = 0, \quad u(x, a) = 0,$$

$$v(x, 0) = 0, \quad v(x, a) = 0.$$

То есть боковые грани пластины защемлены, а на верхнюю грань пластины действует равномерно-распределенная нагрузка.

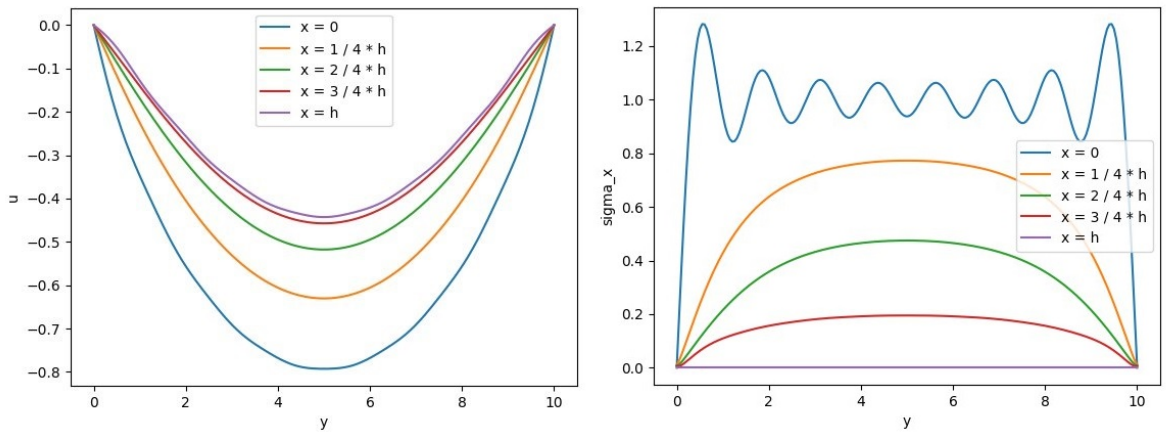


Рис. 3: Графики $u(x, y)$ и $\sigma_x(x, y)$ в сечениях $x = const$ при $M = 15$

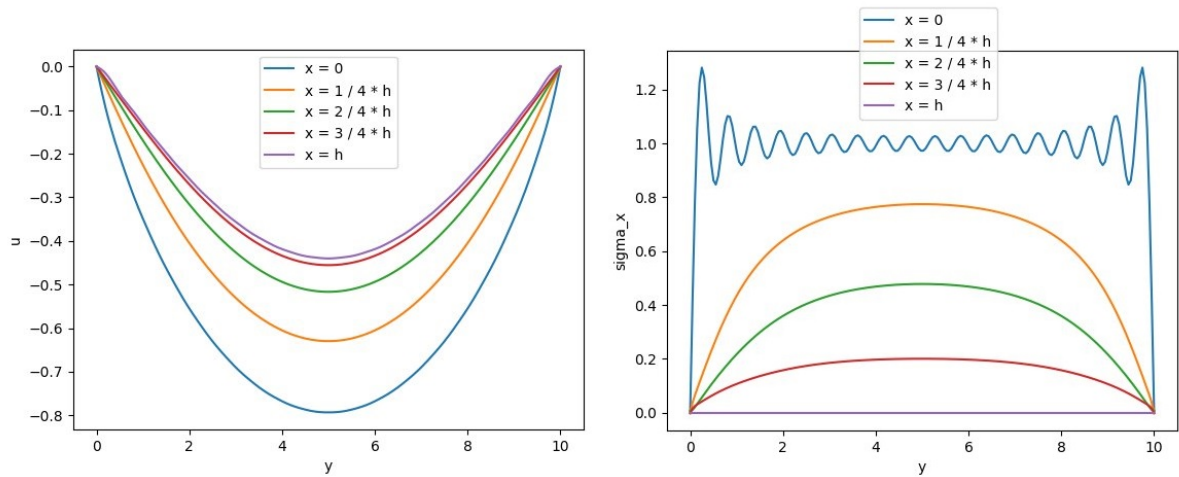


Рис. 4: Графики $u(x, y)$ и $\sigma_x(x, y)$ в сечениях $x = const$ при $M = 35$

Результаты расчета, полученные в примере, полностью совпадают с результатами методом разложения граничных функций в ряды Фурье, однако сходимость второго метода выше.

Некоторые особенности:

Метод был реализован с помощью пакета математических инструментов для вычислений с заданной длиной мантиссы `mpmath`. Этот пакет позволяет работать с числами практически неограниченной длиной мантиссы. Он был выбран ввиду возможности возникновения плохо обусловленных СЛАУ.

Нахождение приближенного решения можно поделить на 3 этапа:

- Построение СЛАУ
- Решение СЛАУ
- Построение графиков

Решение СЛАУ производится методом LU-разложения.

Поскольку для разрешимости СЛАУ приходится использовать большую длину мантиссы, то вычисления тригонометрических функций при построении системы становятся дорогостоящими, и повторно вычислять уже найденные значения функций в данном случае нецелесообразно. Поэтому программа запоминает все вычисленные ранее значения тригонометрических функций. К примеру не запоминая эти данные построение СЛАУ

для 700 значащих цифр мантииссы и 35 слагаемых в частичных суммах рядов занимает около 28,5 секунд, а запоминая – 7,5 секунд. При увеличении этих параметров разрыв только возрастает. То же самое касается и построения графиков – при сохранении значений тригонометрических функций построение происходит в несколько раз быстрее. Однако это влечет за собой повышение используемого объема оперативной памяти.

Построенные приближенные решения из частичных сумм с четным числом слагаемых сходятся хуже, чем аналогичные для нечетных. К примеру приближенное решение из четного числа слагаемых в частичных суммах для приведенной в пример задачи уже не будет обладать симметричностью.

Точки построения СЛАУ равноудалены друг от друга. Такой набор точек выбран как простейший. Однако, были проведены эксперименты по использованию значений в угловых точках, а также несколько иному их выбору на границах пластины. В некоторых случаях графики сильно отличались друг от друга. Вопрос об оптимальном выборе точек остается открытым.

Указанные недостатки не позволили в ходе данной работы получить приемлимые результаты по декомпозиции тел сложной конфигурации на прямоугольные однородные области.

2.Графический интерфейс

Графический интерфейс был реализован с помощью библиотеки Tkinter.

tk

☒ Orthotropy ☐ Isotropy

Values of selected functions for each border:

Condition type for upper border: cinematic

$u(0, y) =$

$v(0, y) =$

Condition type for right border: cinematic

$u(x, a) =$

$v(x, a) =$

Condition type for bottom border: cinematic

$u(h, y) =$

$v(h, y) =$

Condition type for left border: cinematic

$u(x, 0) =$

$v(x, 0) =$

Plate size:

$h =$

$a =$

Material characteristics:

$E_x =$

$E_y =$

$G_{xy} =$

$\nu_{xy} =$

Digits: Number of sum terms:

Start!

Рис. 5: Окно с заданием параметров метода

После запуска метода, этапы выполнения программы, затраченное время и сообщения об ошибках будет выводиться в консоль.

Далее, если решение было построено, появится окно для построения графиков. Предыдущее окно не исчезнет, метод можно повторно запустить и сравнить графики решений при различных начальных данных.

Графики строятся с использованием пакета matplotlib.

Заключение

В ходе данной работы был программно реализован и исследован приближенно-аналитический метод коллокации для плоских задач теории упругости.

Список литературы

- [1] Киселев В. А. Плоская задача теории упругости. М.: Высш. школа, 1976.
- [2] Лехницкий С. Г. Теория упругости анизотропного тела. Изд. 2-е. М.: Наука, 1977.
- [3] Палкович П. Ф. Теория упругости. М.: Оборонгиз, 1939.
- [4] Малиев А. С. О выборе функций в общих решениях задачи равновесия изотропного упругого тела // Труды ЛЭТИИЖТа. Вып. 4. М. : Трансжелдориздат, 1952.
- [5] Власов В. З. Метод начальных функций в задачах теории упругости. Изв. АН СССР. Серия ОТН. 1955. № 7.
- [6] Лурье А. И. Пространственные задачи теории упругости. М. : Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1955.
- [7] Агарев В. А. Метод начальных функций для двумерных краевых задач теории упругости. Киев: Изд-во Акад. наук УССР, 1963.
- [8] Ванюшенков М. Г. Расчет тонких упругих пластин методом начальных функций. М.: МИСИ, 1965.
- [9] Галилеев С. М., Матросов А. В. Метод начальных функций в расчете слоистых плит // Прикладная механика. 1995. Т. 31(41). № 6.
- [10] Ворович И. И. Некоторые математические вопросы теории пластин и оболочек // Труды II Всесоюзного съезда по теоретической и прикладной механике. М.: Наука, 1966. Т. 3.

- [11] Джанелидзе Г. Ю., Прокопов В. К. Метод однородных решений в математической теории упругости // Труды IV Всесоюзного математического съезда. М.: Наука, 1964. Т. 2.
- [12] Бубнов И. Г. Напряжения в обшивке судов от давления воды. СПб.: Изд-во А. Э. Винеке, 1904.
- [13] Гринченко В. Т., Улитко А. Ф. Пространственные задачи теории упругости и пластичности: равновесие упругих тел канонической формы. Киев: Наукова думка, 1985.
- [14] Meleshko V. V., Gomilko A. M. On the bending of clamped rectangular plates // Mech. Res. Commun, 1994. N 21.
- [15] Матросов А. В. Численно-аналитическое решение граничной задачи деформирования линейно-упругого анизотропного прямоугольника // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 10: Прикладная математика, информатика, процессы управления, 2007.
- [16] Analysis of elastic systems with discontinuous parameters Goloskokov, D.P., Matrosov, A.V. Constructive Nonsmooth Analysis and Related Topics (Dedicated to the Memory of V.F. Demyanov), CNSA, 2017.
- [17] Матросов А.В. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЛИНЕЙНО-УПРУГИХ СИСТЕМ СЛОЖНОЙ КОНФИГУРАЦИИ. Диссертация на соискание ученой степени доктора физико-математических наук / Федеральное государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования Санкт-Петербургский государственный университет. Санкт-Петербург, 2012.